A- Généralités :

1) Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

2) Une suite peut être définie :

- d'une façon explicite : $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{N}$
- par récurrence : u_0 est donnée et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction.

3) Raisonnement par récurrence :

Soit $P(n)$ une propriété à démontrer pour tout entier $n \geq n_0$ où n_0 est un entier naturel donné.

1ère étape : On vérifie que $P(n)$ est vraie pour l'entier n_0.

2ème étape : On démontre que si $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, alors $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geq n_0$ la propriété $P(n)$ est vraie.

B – Suites particulières :

1 – Suites arithmétiques :

➪ (u_n) est une Suite arithmétique s'il existe un réel $\boldsymbol{r}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$; c'est-à-dire que $u_{n+1} = u_n + r$. (**r** est la raison de la suite u)

➪ **Termes générales d'une Suite arithmétique :**

$$\boxed{\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}} \qquad \boxed{\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}}$$

➪ Pour calculer la somme S des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\boxed{S = \frac{(\textbf{nombre de terme de } S) \times (\mathbf{1^{er}} \textbf{ terme } + \textbf{dernier terme})}{2}}$$

2 - Suites géométriques :

➪ (u_n) est une Suite géométrique s'il existe un réel $\boldsymbol{q}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$; c'est-à-dire que $u_{n+1} = q.u_n$. (**q** est la raison de la suite u)

➪ **Termes générales d'une Suite géométrique :**

$$\boxed{\boldsymbol{u_n = u_0 . q^n}} \qquad \boxed{\boldsymbol{u_n = u_p . q^{n-p}}}$$

➪ Pour calculer la somme S des termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$\boxed{S = \mathbf{1^{er}} \textbf{ terme de la somme } S \times \frac{1 - q^{\text{nombre de terme de } S}}{1-q}}$$

➪ **Limite d'une suite géométrique :** $\boldsymbol{u_n = u_0 . q^n}$

Si	$-1 < q < 1$	$q > 1$	$q = 1$	$q < -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	0	$+\infty$ si $(u_0 > 0)$ $-\infty$ si $(u_0 < 0)$	u_0	Pas de limite

C- Suite majorée-minorée-bornée

➪ (u_n) est dite majorée par $M \Leftrightarrow \boldsymbol{u_n \leq M}$

➪ (u_n) est dite minorée par $m \Leftrightarrow \boldsymbol{u_n \geq m}$

➪ (u_n) est dite bornée ssi elle est à la fois majorée et minorée c'est-à-dire que $\boldsymbol{m \leq u_n \leq M}$

D- Monotonie (ou sens de variation) d'une suite

➪ une suite (u_n) est dite **croissante** $\Leftrightarrow \boldsymbol{u_{n+1} \geq u_n}$

➪ une suite (u_n) est dite **décroissante** $\Leftrightarrow \boldsymbol{u_{n+1} \leq u_n}$

E- Convergence d'une suite

➪ On dit qu'une suite (u_n) est convergente si elle admet une limite finie ℓ. Si non elle est dite divergente.

➪ Si une suite possède une limite celle-ci est unique.

➪ Si une suite est convergente alors elle est bornée.

➪ Toute suite croissante et majorée est convergente.

➪ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

➪ Toute suite (u_n) croissante et non majorée est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

➪ Toute suite (u_n) décroissante et non minorée est divergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

F- Limites et ordre :

➪ Si $\begin{cases} v_n \leq u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

➪ Si $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

➪ Si $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

G- Convergence d'une suite de type $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite à valeurs dans I qui converge vers ℓ, (**Si** $u_{n+1} = f(u_n)$ et **Si** $\ell \in I$) **alors** $((f(\ell) = \ell)$.